

3. При условии $r < n$ во множестве $V_{\text{реш}}$ всех решений однородной системы линейных уравнений существует линейно независимая система, состоящая из $n - r$ решений, которая называется **фундаментальной системой решений** этой однородной системы.

Множество всех решений системы линейных уравнений, выраженное через параметры (свободные неизвестные), называется **общим решением системы линейных уравнений**. Каждое решение системы называется её частным решением.

Чтобы получить какое-либо частное решение, следует в общем решении придать свободным неизвестным какие-то конкретные значения.

Пример 1. Найти все решения однородной системы
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Главный определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$, поэтому

система имеет ненулевые решения. Для того чтобы получить эти решения, умножим второе уравнение на 2 и прибавим к первому, получим третье уравнение $5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0$. А это означает, что третье уравнение является следствием первых двух, поэтому данную систему можно свести к двум

уравнениям
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$
 или к виду
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2x_3 \\ x_1 - x_2 = -4x_3. \end{cases}$$
 Решая эту

систему, получим $x_1 = -\frac{18}{7}x_3$; $x_2 = \frac{10}{7}x_3$. Полагая в этих равенствах x_3 равным любому числовому значению, получим всевозможные решения.

Ответ: $x_1 = -\frac{18}{7}x_3$; $x_2 = \frac{10}{7}x_3$; $x_3 \in R$.

Элементы векторной алгебры

1. Векторы и линейные операции над ними

Рассмотрим в пространстве две точки A и B . Они определяют отрезок AB .

Отрезок AB называется *направленным*, если его концы A и B упорядочены; если при этом первой является точка A , а второй – точка B , то A – начало отрезка, а B – его конец. Направленный отрезок обозначается \overrightarrow{OA} или \overrightarrow{AB} . На рисунке 1 направленный отрезок снабжен стрелкой на конце.

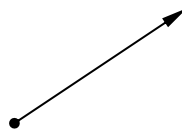


Рис. 1

Вектором (свободным вектором) называется направленный отрезок, который можно перемещать в пространстве параллельно самому себе. Обозначение: \overrightarrow{AB} или \vec{a} .

Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB .

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются *сонаправленными* (обозначают $\vec{a} \uparrow \vec{b}$), если они лежат на параллельных прямых и направлены в одну сторону.

Векторы \vec{a} и \vec{b} называют *противоположно направленными* (обозначают $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$), если они лежат на параллельных прямых и направлены в разные стороны.

Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} называются *противоположными*.

Каждую точку A пространства можно рассматривать как вектор с совпадающим началом и концом. Этот вектор обозначается $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ и называется *нулевым* вектором. Его длина считается равной нулю, а направление не определено.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным*. Обозначается \vec{e} .

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. И обратно: если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

Два ненулевых вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными* (обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Три и более векторов называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Для определенности любую тройку векторов, содержащую нулевой вектор, считают компланарной.

Углом между свободными векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол, на который необходимо повернуть вектор \vec{a} так, чтобы векторы \vec{a} и \vec{b} стали коллинеарными сонаправленными векторами. Угол поворота против часовой стрелки считают положительным, в противном случае – отрицательным.

Два ненулевых вектора \overline{AB} и \overline{CD} при $A \neq C$ называются *равными*, если они:

- лежат на параллельных прямых;
- точки B и D лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точки A и C ;
- имеют равные длины, т. е. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

2. Линейные операции над векторами

Сложение векторов

Пусть заданы векторы \vec{a} , \vec{b} . Выберем в пространстве произвольную точку O и отложим от нее вектор \vec{a} . Получим вектор \overline{OA} . От точки A отложим вектор \vec{b} . Получим вектор \overline{AB} . Свободный вектор \overline{OB} называется *суммой* свободных векторов \vec{a} и \vec{b} .

1) правило треугольника (рис. 2)

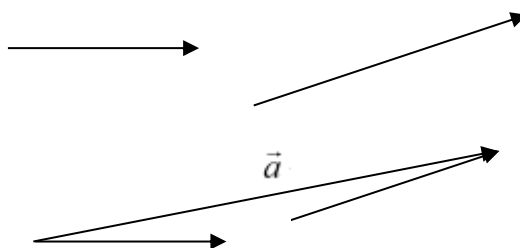


Рис. 2

2) правило параллелограмма (рис. 3)

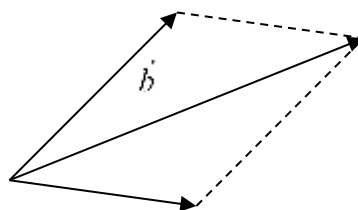


Рис. 3

3) правило многоугольника (рис. 4)

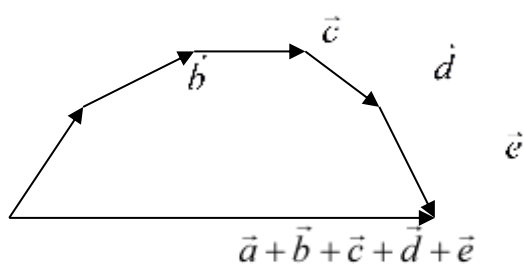


Рис. 4

Частный случай

Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то сумма векторов равна $\vec{0}$.

Свойства операции сложения:

1. Для любых двух векторов \vec{a}, \vec{b} верно равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность).
2. Для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ верно равенство $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность).
3. Существует такой нулевой вектор $\vec{0}$, что для любого вектора \vec{a} верно равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. Для любого вектора \vec{a} существует вектор $(-\vec{a})$, для которого $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Вычитание векторов

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий равенству $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Результирующий вектор разности направлен в сторону уменьшаемого вектора. В параллелограмме, построенном на векторах \vec{a}, \vec{b} , разность – это вторая диагональ параллелограмма (рис. 5).

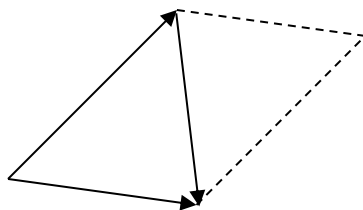


Рис. 5

Умножение вектора на число

Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \lambda < 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

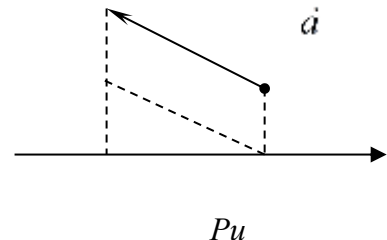
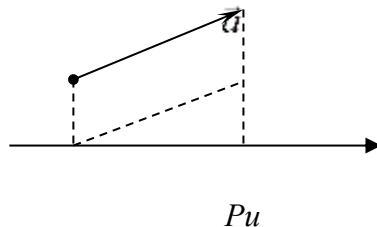
Заметим, что в случае, когда $\lambda = 0$, $|\lambda\vec{a}| = 0$.

Свойства операции умножения вектора на число:

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
3. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, где $\lambda, \mu \in R$, а \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы.

3. Проекция вектора на ось

Пусть вектор \vec{a} составляет угол φ с осью l . **Проекцией** вектора на эту ось называется число (скаляр) $pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$.



Если угол φ острый (рис. 6), то проекция является положительной величиной, если угол φ тупой (рис. 7) – проекция отрицательна, если угол φ прямой – проекция равна нулю.

При ортогональной проекции угол между отрезками OA_0 и AA_0 прямой. Существуют проекции, у которых этот угол отличен от прямого.

Проекции векторов обладают следующими *свойствами*:

1. $pr_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = pr_l \vec{a}_1 + pr_l \vec{a}_2$ (проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов).

2. $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l \vec{a}$ (проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на число).

Компонентной (составляющей) вектора \vec{a} относительно оси l называется вектор $\vec{a}' = \overline{A'B'}$ где A' – проекция начала вектора A , B' – проекция конца B на ось l .

4. Координаты вектора

Радиус-вектором точки M называется вектор, начало которого совпадает с началом координат, т. е. вектор \overrightarrow{OM} .

Координатами вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ называются координаты его конечной точки M .

$$R^2 : \vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x; y) \text{ или } \vec{a} = \{x; y\}.$$

$$R^3 : \vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z) \text{ или } \vec{a} = \{x; y; z\}.$$

Если вектор задан координатами начала $A(x_A; y_A; z_A)$, и конца $B(x_B; y_B; z_B)$, то координаты вектора \overrightarrow{AB} можно найти по формуле:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \quad (1)$$

Если векторы заданы координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то операции над векторами выполняются по формулам:

$$1) \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1), \text{ при } \lambda \neq 0;$$

$$2) \vec{a} \pm \vec{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b).$$

Длина (модуль) вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (2)$$

В системе xOy векторы \vec{i} и \vec{j} образуют **базис двумерного пространства**, где \vec{i} и \vec{j} – единичные векторы или орты (рис. 8). $\vec{i} \perp \vec{j}$; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

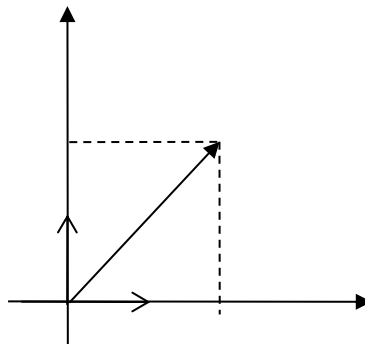


Рис. 8

В системе $xOyz$ векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют *базис трехмерного пространства*. Если базисные векторы попарно ортогональны, а длины их равны единице, то система координат называется *ортонормированной*.

Базисные векторы *правой ортонормированной системы координат* обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 9). $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}; \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{j} \perp \vec{k}; \vec{k} \perp \vec{i}; |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

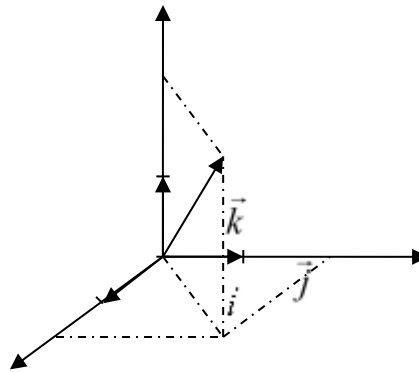


Рис. 9

Любой вектор \overrightarrow{OM} можно разложить по базисным векторам:

$$R^2 : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad (3)$$

$$R^3 : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) называются *разложением вектора по координатному базису*.

$x \cdot \vec{i}; y \cdot \vec{j}; z \cdot \vec{k}$, называются *компонентами вектора* на соответствующие оси.